La logique 2.0

Jean-Yves Girard

26 septembre 2018

Résumé

Dans ce tract, je pose les fondements d'une relecture radicale de la logique. Que j'illustre de développements techniques : en particulier une notion de vérité basée sur l'invariant d'Euler-Poincaré.

Introduction : le retour de la philosophie

À la fin du XIXème siècle, la logique connaît une renaissance spectaculaire. Mais, comme un serpent qui aurait grandi trop vite en omettant de changer de peau, elle reste de nos jours encore prisonnière d'une tunique de Nessus, le format scientiste concocté par les pères fondateurs et devenu obsolète. Cette obsolescence est rendue manifeste par les *réseaux de démonstration* issus de la logique linéaire [2]. Il est grand temps de changer de grille de lecture et d'effectuer une « révolution copernicienne » : le passage à la *logique 2.0*.

Le premier point de résistance est la philosophie dominante — analytique pour simplifier — dont la thèse principale est que... la philosophie ne sert à rien : une simple traduction permettrait de la court-circuiter en la réduisant au calcul des prédicats. Cette thèse, due *grosso modo* à Russell, place la logique en position d'arbitre irréfragable. Et donc, comment la juger si elle est son propre jury ? Cerise sur le gâteau, les modernes « analytiques » réduisent la philosophie à la logique... du temps de Russell, la seule qu'ils connaissent. Cette logique périmée dicte ainsi sa loi sous couvert de philosophie scientiste.

Chat échaudé craint l'eau froide ; qui a eu affaire aux épigones de Russell est convaincu de la justesse de leur thèse — l'inutilité de la philosophie. Et perçoit comme des truismes sans intérêt, donc malgré tout indéniables, les slogans subliminaux sussurrés par ces « analytiques » — signifiant/signifié, forme/fond, langage/modèle. Or ces lapalissades ne sont pas innocentes [1] : elles expriment les préjugés scientistes tels qu'ils avaient cours vers 1925, au bon temps des « solutions finales ».

La logique 2.0 est l'illustration du retour de la philosophie : c'est à partir d'une réflexion de ce type qu'il faut repenser la logique [2]. Ce qui induit des restructurations, des simplifications spectaculaires : par exemple, le remplacement du calcul des prédicats par le calcul propositionnel.

1. Par exemple, la vérité selon Tarski, voir *infra*, page 8.
2. C'est ce que j'ai tenté de faire dans mon livre [7].

1 La logique 1.0

1.1 Le réalisme axiomatique

La logique 1.0 prétend opposer la *forme* axiomatique au *fond* sémantique.

1.1.1 Grandeur et misère de l'axiomatique

Axiomatique signifie « arbitraire », et même « officier » en grec moderne. Cette étymologie militaire place donc l'axiomatique au nadir de la rationalité, en opposition à la logique, par nature allergique aux cours martiales.

L'axiomatique reste cependant un outil exceptionnel. Elle consiste à dégager les hypothèses utiles qui induisent tel ou tel résultat. C'est ainsi que l'on axiomatise les structures algébriques — groupes, anneaux, corps. Et aussi les structures continues, espaces topologiques, algèbres stellaires, etc.

Dans le cas des structures algébriques, l'axiomatisation réduit le raisonnement sur — disons — les groupes aux conséquences logiques de certains axiomes, dits « de groupe ». Cette étape établit un pont entre axiomatique et logique, avec une distribution des rôles : la logique est ce qui va de soi — l'*ἀνάγκη*, la nécessité — ce qui est *intrinsèque*, l'axiomatique ce qui ne va pas de soi, autrement dit *extrinsèque*, contingent.

Cependant, cette opposition n'est pas si évidente en pratique : par exemple, l'égalité est-elle logique ou axiomatique ? La logique 1.0 a choisi l'axiomatique en traitant $x = y$ comme un prédicat parmi d'autres [3]. Ce qui constitue un aveu d'échec : quoi de plus logique que cette égalité qui occupe la quasi totalité des formulaires mathématiques ? Cet exemple nous montre les qualités et les défauts de l'axiomatique : peu exigeante, elle se substitue allègrement à la logique. Mais au prix d'une perte de qualité : ravaler l'égalité au rang d'une axiomatique arbitraire revient à utiliser un Stradivarius comme bois de chauffage.

1.1.2 Du formalisme au morphologisme

Hilbert a, avec son *formalisme*, l'idée géniale de couper le cordon ombilical avec la Réalité — la Sainte Sémantique — pour se consacrer à la pure forme ; il refuse de ce fait l'opposition entre forme et fond, puisque le véritable fond devient la forme. Cette idée, liée aux succès de la méthode axiomatique, renferme un piège diabolique dans lequel s'est empêtré ce « formalisme 1.0 ». En effet, une démonstration selon Hilbert n'est rien d'autre qu'un arbre, dont les nœuds sont des règles logiques — réduites au seul *Modus Ponens* —, les feuilles sont des axiomes et la racine est l'énoncé démontré. Mais comment expliquer un axiome par sa forme, réduite à celle, stéréotypée et négligeable, d'une feuille d'arbre ? Comme tous les arbres se ressemblent, leur forme se révèle d'une platitude, d'un manque d'éloquence à pleurer !

Malgré une volonté méritoire de s'extraire de la sémantique, Hilbert a donc scié la branche sur laquelle reposait son approche. Je propose une relecture mo-

3. L'approche à la Leibniz, *infra*, section 1.2.5, ne s'extrait pas vraiment de l'axiomatique.

derne du formalisme hilbertien dont la condition *sine qua non* est l'abandon de l'axiomatique, nécessairement informe, et le recentrage sur la logique proprement dite. Ce qui induit une disparition collatérale du calamiteux *Modus Ponens* — bon à tout, bon à rien — et son remplacement par des règles douées d'une forme éloquente, d'une topologie exprimant le sens profond des opérations *logiques*. Les *réseaux de démonstration* issus de la logique linéaire réalisent ce « formalisme 2.0 » que je propose d'appeler *morphologisme*.

C'est à partir de cette thèse morphologiste que nous serons amené à revoir les primitives logiques : peut-on les justifier du point de vue de la forme ? La réponse est le plus souvent positive, avec quelques rares refus, qui sont plutôt des modifications à la marge. Et surtout, la forme suggère de nouvelles opérations : ainsi les deux constantes logiques フ (*fu*) et ヲ (*wo*) sont-elles issues de considérations morphologiques, sans le moindre substrat sémantique. Puisque フ = ∼フ, on obtient même une réfutation *logique*[4] de la logique classique.

1.1.3 Grandeur et misère de la sémantique

La sémantique est extrèmement utile du point de vue pédagogique : rien de tel qu'un recours à la réalité pour réfuter les raisonnements spécieux. Ainsi, l'indépendance du Postulat d'Euclide trouve-t-elle sa justification la plus convaincante dans l'invocation d'une sphère ou d'un paraboloïde de hyperbolique. De là à en conclure que la logique reproduit la réalité, il n'y a qu'un pas, aisément franchi par la logique 1.0, et techniquement autorisé par le théorème de *complétude*.

Malheureusement, la structure logique par excellence, les entiers et leur mode de raisonnement par récurrence — mode du second ordre, puisqu'il réfère à une propriété quelconque — échappe au réalisme : le théorème d'incomplétude exhibe un énoncé $\mathcal{G}$ – « G » comme Gödel — qui n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano **PA**, tout en n'ayant *aucun* contre-modèle. Par « aucun », je signifie que les prétendues réfutations de $\mathcal{G}$ sont des machins obtenus en complétant *après coup* la théorie consistante $\mathbf{PA}+\neg\mathcal{G}$. Le seul modèle de **PA** que l'on obtienne naturellement est bien connu ; les autres, qui sont affublés du qualificatif de « non standard », ne sont là que pour la façade. Ils constituent, avec les modèles de Kripke, les villages-Potemkine du réalisme axiomatique.

L'incomplétude sur laquelle achoppe le réalisme s'inscrit dans la lignée du refus aristotélicien du *paralogisme*, i.e., de la justification factuelle : un raisonnement peut mener à une conclusion correcte tout en étant erronné[5]. La logique est en fait placée sous le signe d'une certaine *défiance*, d'une prise de distance par rapport à cette réalité qui peut nous apparaître aujourd'hui indéniable et demain n'être plus qu'un préjugé, un article de foi — pensons au géocentrisme.

4. Jusqu'à présent, les rares réfutations du « classique », obtenues par réalisabilité (genre $\neg\forall x(A \vee \neg A)$), ne sortaient pas du cadre axiomatique. フ = ∼フ est, par contre, un principe logique *indiscutable*, pas un ukase sorti du chapeau.

5. Exemple extrème de paralogisme : Sherlock Holmes (*Le Signe des quatre*) déduit de l'examen d'une montre à gousset que le pauvre Watson avait un frère aîné mort alcoolique ! Cette abduction extravagante ne fonctionne que par le bon vouloir de Watson, *alias* Conan Doyle, qui décide de confirmer cette ânerie.

1.1.4 Le Sabre et le Goupillon

On rapprochera axiomatique et sémantique de l'Armée et l'Église, institutions importantes et utiles, mais plutôt antagonistes à la démocratie qui ne saurait en aucune façon reposer sur elles. La complicité du Sabre et du Goupillon trouve un écho dans l'incroyable collusion scientifique entre axiomatique et sémantique, chacune confortant l'autre.

Donnons un exemple, déjà évoqué dans [6]. La formulation de la logique, au tournant du XXème siècle, est axiomatique, d'où de multiples possibilités d'erreurs dues au militarisme de l'approche. Ainsi, le raisonnement par *généralisation* : pour démontrer $\forall x\, A[x]$, il faut choisir un élément générique y (appelé *variable*) et démontrer $A[y]$. Ce raisonnement a été formalisé à la vite fait, bien fait : on a, en effet, décidé d'incorporer *systématiquement* les éléments génériques au langage en « oubliant » la déclaration préliminaire « soit y une variable ». Ces variables non déclarées, passagers clandestins de la logique, permettent de démontrer l'implication fautive $\forall \Rightarrow \exists$, implication dans la lignée du syllogisme fautif *Barbari*[6] et que toute réflexion un peu approfondie sur la logique amène à refuser.

Le Sabre a commis une erreur, heureusement, le Goupillon veille au grain. Quel est donc l'avis de l'Église de la Réalité sur ce sujet ? Elle justifie le principe douteux au nom de l'*horror vacui* en excluant les modélisations vides. On cherchera en vain une raison honnête à cette *fatwa* : on a simplement supprimé un témoin gênant, le modèle vide qui réfutait précisément l'*axiome* $\forall \Rightarrow \exists$.

Les deux points de vue, l'arbitraire militaire et le préjugé réaliste, ne sont que les deux faces de la même médaille ; ils fonctionnent comme une association de malfaiteurs, chacun pouvant se prévaloir du soutien de son complice et s'arroger ainsi un droit de cuissage sur la philosophie[7].

1.2 Premier et second ordre

1.2.1 Une distinction nécessaire

Au tournant du XXème siècle, l'axiomatisation fait apparaître un départ entre structures algébriques et topologiques. Ces dernières, typiquement celles faisant intervenir les nombres réels — mais aussi les entiers naturels —, sont rétives à l'axiomatisation. Elles supposent, en effet, l'intervention, non pas de propriétés bien définies, mais de *toutes* les propriétés : elles font donc référence à la totalité de l'espace logique, totalité monstrueuse et hautement problématique.

Le second ordre se manifeste dans l'« axiomatisation » par Peano du principe de récurrence :

$$(A[0] \wedge \forall x\, (A[x] \Rightarrow A[x+1])) \Rightarrow \forall y\, A[y] \qquad (1)$$

6. Tout A est B, tout B est C, donc un A est C.

7. Avec son jivarisme accoutumé, Quine n'a pas hésité à réduire l'ontologie à ce quantificateur existentiel $\exists x$ dont nous venons de rappeler le caractère bricolé. Cette métaphysique analytique est allée rejoindre dans les poubelles de la pensée — au demeurant bien fournies rayon ontologie — la croquignolette « preuve » de l'existence de Dieu, voir note 26.

formulé pour une propriété *quelconque* $A[\cdot]$. On sait que cette formulation est incorrecte : sans un formatage préalable des propriétés $A[\cdot]$, on arrive à des paradoxes, comme celui de Richard (1905). Mais tous les formatages sont problématiques — soit inconsistants (trop laxistes), soit incomplets (trop répressifs) : c'est ce que dit l'incomplétude [8].

1.2.2 La notion de système logique

Puisque la totalité des propriétés pose problème, certains — les inévitables « analytiques » — ont été amenés à émettre des *fatwas* contre le second ordre. Et, comme les mathématiques se situent quelque part entre les entiers naturels et les nombres réels, i.e., au second ordre, de proposer le remplacement de la *logique* du second ordre par des *axiomatiques* du premier ordre.

Le second ordre possède, en effet, une espèce d'affinité avec l'axiomatique : il suffit d'observer la caractère *extrinsèque* de cette « totalité des propriétés » qui se dérobe. C'est pourquoi il est possible d'axiomatiser partiellement ce qui relève du second ordre. Ainsi, la récurrence, de principe logique du second ordre, devient-elle un *schéma d'axiomes* du premier ordre : c'est ce schéma qui constitue ce que nous appelons improprement arithmétique de Peano, le système **PA** — forme corrigée, mais émasculée, de la formulation originale, trop vague.

Cette formulation originale, bien que globalement incorrecte, reste logique : elle repose sur ces propriétés quelconques qui posent certes problème, mais qui, contrairement aux axiomes, ne sont pas informes. D'où la possibilité de *systèmes* logiques du second ordre, typiquement mon propre système $\mathbb{F}$ [2]. Il s'agit de spécifier une classe de propriétés « correctes », sans prétendre pour autant à l'exhaustivité. Cette spécification nécessite un système, i.e., un regard extrinsèque codifiant la formation de ces propriétés licites.

A contrario, le premier ordre est donc ce qui n'a pas besoin de système, de contrôle externe, car totalement intrinsèque [9].

1.2.3 La ligne de partage

Si nous revenons aux formulations non axiomatiques de la logique — calcul des séquents, déduction naturelle —, on observe que les séquents sont du second ordre : ils font référence à des *contextes* $\Gamma, \Delta, \ldots$ composés de propositions quelconques.

Par contre la déduction naturelle a tendance à rester intrinsèque, i.e., du premier ordre. Ainsi, les règles de la conjonction :

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots \\ A & & B\end{matrix}}{A \wedge B}\,(\wedge I) \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\,(l \wedge E) \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\,(r \wedge E)$$

8. Pour un exemple de formatage, voir le passage sur Leibniz, section 1.2.5.
9. C'est pourquoi, dans mes articles récents, je ne parle que d'opérations logiques, sans référence à un système.

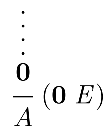
ne supposent-t-elles, en aucune façon, un système : à partir de A et B, déjà connus, on peut introduire C (noté $A \wedge B$) obéissant à ces principes. On pourra faire la même remarque pour l'implication ; mais pas pour la quantification $\forall x$, qui suppose un système, celui spécifiant les *termes* — individus du premier ordre — licites. La logique 2.0, en faisant apparaître $\forall x$ comme une opération du second ordre, confirme ce distinguo [10].

La disjonction intuitionniste utilise, par contre, un contexte C :

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{A \vee B}\,(l \vee I) \qquad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ B\end{matrix}}{A \vee B}\,(r \vee I) \qquad \frac{\begin{matrix} \\ \vdots \\ A \vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,(\vee E)$$

Ce C extrinsèque en fait une opération du second ordre.

Idem pour l'absurdité qui utilise aussi un contexte, noté ici A :



$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \mathbf{0}\end{matrix}}{A}\,(\mathbf{0}\ E)$$

Les réseaux de démonstration développent la logique du premier ordre hors de toute systématique ; ils proposent, en particulier, une alternative du premier ordre $A \oplus B$ à la disjonction intuitionniste $A \vee B$, laquelle reste définitivement une opération du second ordre. Ce qui n'est d'ailleurs pas rédhibitoire, mais il importe d'appeler un chat un chat [11].

Les premières versions de la logique linéaire comportaient les exponentielles $!A, ?A$, ainsi que les éléments neutres $\perp, \mathbf{1}$. Ces opérations ne vivent vraiment qu'au second ordre. $!A$ et $?A$ sont des *ions logiques* à rapprocher de NH^4 qui n'existe pas à l'état libre. Ils n'apparaissent au premier ordre que sous les forme combinées $A \olessthan B := !A \otimes B$ et $A \ltimes B := ?A \parr B$, voir [4].

1.2.4 Les atomes

Les formulations 1.0 de la logique sont souvent du second ordre, e.g., les schémas d'axiomes $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ et $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ qui réfèrent à la totalité des propositions licites A, B, C.

En fait, même les atomes de la logique « du premier ordre » sont du second ordre. Pour dissimuler cette évidence gênante, on les présente comme des *constantes* propositionnelles P, Q, R ; le fait d'utiliser le symbole P plutôt que X (réservé aux variables) dénoterait la constance. Mais ce n'est qu'une pitoyable taxinomie : P, Q, R sont interchangeables et on peut même leur substituer des propositions A, B, C sans mettre en péril la correction logique. Les vraies constantes — pensons aux nombres e et π — ne sont pas interchangeables.

10. La $\delta\acute{o}\xi\alpha$ catégorique présente les primitives logiques au moyen de problèmes universels. Cette approche, qui invoque la totalité d'une catégorie, est du second ordre.

11. La version unaire de la disjonction intuitionniste, i.e., $A \vee B$ sans le B, n'est autre que l'exponentielle $!A$, ce qui fait que $A \vee B = !A \oplus !B$.

En fait, les prétendues constantes propositionnelles sont gérées comme des variables : on devrait donc les noter $X, Y, Z, \ldots$. Une proposition $A[P]$ se lirait alors $A[X]$ et, une fois démontrée, comme sa forme quantifiée $\forall X A[X]$. Cette lecture du second ordre s'accorde avec l'exigence de substituabilité, qui correspond à une coupure avec le principe $\forall X\, A[X] \Rightarrow A[B]$, dont le résultat est la substitution de B pour P dans A.

On découvre que la prétendue logique du premier ordre est en fait tout entière du second ordre — un second ordre assez sage au demeurant. On pourrait invoquer comme vraies constantes du premier ordre, les valeurs de vérité **v,f**, qui se réduisent aux quatre constantes $\perp, \mathbf{1}, \top, \mathbf{0}$ dont seules les deux dernières sont du premier ordre.

$\top$ et $\mathbf{0}$ sont trop singulières pour satisfaire notre besoin de premier ordre. Heureusement, la logique 2.0 nous propose deux atomes du premier ordre, jamais considérés jusqu'ici. Les réseaux de démonstration vivant très bien sans l'exigence de substituabilité, un réseau formé d'un point, donc insubstituable, insécable, devient une constante. Nous verrons que cette constante peut être envisagée de deux façons, フ et ヲ, l'une objective, l'autre subjective.

En résumé : seule la logique 2.0 nous propose un authentique fragment du premier ordre, les propositions bâties à partir des constante フ et ヲ. Qui contient les constantes additives $\top, \mathbf{0}$, puisque $\mathbf{0} = \downarrow($フ ⅋ ヲ$) \otimes$ ヲ — où $\downarrow$ est l'*expansionnelle* (sorte d'exponentielle 2.0), voir *infra*, section 2.1.3.

1.2.5 Le calcul des prédicats

Au terme d'une familiarité de 50 ans avec le calcul des prédicats, j'ose prétendre qu'il s'agit d'un bricolage axiomatique, la création la plus boiteuse de la logique 1.0 [12]. Ce qui suit reprend [6].

Le calcul des prédicats pose problème [13] quelque soit la façon dont on le regarde. Ainsi, les algèbres de Boole, approche très réductrice à la logique, qui ont pour elle leur extrême simplicité, ne fonctionnent que pour les propositions. Leur extension au calcul des prédicats est laborieuse : on n'arrive pas à placer les foutus individus, d'où l'échec des « algèbres cylindriques ». Les interprétations plus sophistiquées, par exemple au moyen d'espaces cohérents, butent de même sur la quantification : $\forall x A[x]$ apparaît comme une espèce de conjonction généralisée $\&_i A[i]$, construction infinie à des années-lumières de l'uniformité évidente de l'opération dont on voudrait parler.

Le problème le plus grave est l'incapacité à traiter décemment de l'égalité. Certains on prétendu qu'il s'agit en fait d'une opération du second ordre — i.e., de second plan — définie comme $\forall X\,(X(t) \Rightarrow X(u))$. Selon cette « égalité de Leibniz », deux individus sont égaux quand toute propriété de l'un est propriété

12. Je ne mets évidemment pas en cause la valeur *pratique*, amplement démontrée, de ce ce machin, seulement son statut logique. De la même façon qu'il est hors de question de remettre en cause la valeur pratique du géocentrisme : tout en ne lui accordant aucune valeur cosmologique, les sociétés astronomiques publient réguliètement des éphémérides donnant les position des astres par rapport à la Terre.

13. Indépendemment de l'erreur « ontologique » $\forall \Rightarrow \exists$ que nous avons mentionnée et qui peut être corrigée en imposant la déclaration des variables.

de l'autre. L'exemple de l'égalité entre `a` *et* `a` met en pièce cette prétendue définition, puisque, selon que l'on considère ou non le fait d'être à gauche de la particule *et* comme une propriété légitime, on conclura à la différence ou à l'égalité. Le lecteur qui pense que `a` *et* `a` sont égaux refusera donc à « être à gauche de *et* » le statut de propriété légitime. Mais sur quelle base ? La seule possible est qu'elle n'est pas « sémantique », i.e., ne respecte pas... l'égalité !

On peut quand même extraire quelque chose de « Leibniz », en considérant les réseaux de démonstration pour $\forall X\,(X(t) \Rightarrow X(u))$ qui supposent des liens entre des $\sim X(t)$ et des $X(u)$. Ils fonctionneraient tout aussi bien si l'on enlevait le prédicat X et liait des $\sim t$ avec des u. On aboutit finalement à la solution suivante : les individus sont des propositions, peut-être d'un type limité, et l'égalité est l'équivalence linéaire $t \equiv u := (t \multimap u) \,\&\, (u \multimap t)$. L'aporie de l'égalité à la Leibniz — l'impossibilité de définir honnêtement ce qu'est une propriété d'un individu — disparaît, puisque l'individu devient la propriété : on est passé de l'Avoir à l'Être.

Incidemment, on a découvert que l'aporie de l'égalité est due à la logique classique qui piétine les porcelaines et interdit de définir les individus comme des propositions : la logique classique n'en permettrait que deux, comme le montre la variante $t \equiv u \vee u \equiv v \vee v \equiv t$ du tiers exclu. Le fait de déclarer une classe de citoyens de seconde zone (les individus) est un bricolage axiomatique ménageant un ghetto linéaire dans une architecture classique. La logique linéaire permet, au contraire, à l'aide des exponentielles, des zones à gestion classique sans qu'il soit besoin de barbelés interdisant le contact déductif.

La quantification dite du premier ordre apparaît donc comme une quantification du second ordre déguisée. Elle n'est pas sujette aux diverses interrogations liées au second ordre sauvage, car un *système* va codifier l'espace des individus, par exemple, celui des propositions multiplicatives [14].

1.3 La vérité selon Saint Tarski

1.3.1 La vertu dormitive de l'opium

La « définition » de la vérité, due à Tarki, est un sidérant pléonasme :

— $A \wedge B$ est vrai quand A est vrai **et** B est vrai.

— $A \vee B$ est vrai quand A et vrai **ou** B est vrai.

Etcætera, etcætera. Comme $\wedge$, $\vee$ se lisent **et**, **ou**, A est vrai quand $\mathbf{A}$ (la même chose, mais en caractères gras) est vrai. Ce qui a pour effet d'éluder toute discussion quant à la nature de la vérité. On pense ici au *Malade imaginaire* et à l'opium qui ferait dormir de par sa vertu dormitive.

Ceci satisfait les essentialistes qui carburent au *méta* [15] : $\mathbf{A}$ n'est-il pas une sorte de « méta-A » ? On voit tout de suite poindre le *Kyrie eleison* des méta itérés : la vérité de $\mathbf{A}$ serait, à son tour, celle de $\mathbb{A}$ (méta-méta-A), etc.

14. Et préserver ainsi, au moyen d'une notion *ad hoc* de sous-formule, un certain contrôle sur cette quantification « du premier ordre ».

15. Ici, on pense plutôt aux *Habits neufs de l'Empereur* !

1.3.2 Le classique subliminal

Derrière la litanie de l'incantation religieuse se dissimule une imposture, car l'interprétation de $\wedge$ par **et** n'est pas insignifiante. En effet, si $\wedge$ est supposé obéir aux lois logiques, son « méta » est classique, i.e., obéit à une table de vérité vrai/faux. Comme, par ailleurs, le méta est un isomorphisme externe, la logique est classique, CQFD.

La vertu dormitive des explications tarskiennes, et plus généralement de la philosophie analytique, est telle que l'on ne s'en méfie pas. Ici, on nous susurre que la logique n'apporterait finalement que des fioritures à un substrat classique : c'est la thèse du « classique subliminal ».

Prenons l'exemple de la logique linéaire, qui distingue deux conjonctions, $\otimes$ et & : l'équivalence entre les deux, bien que non prouvable, serait tout de même vraie. Seules des considérations subjectives, des questions de ressources par exemple, nous empêcheraient de la reconnaître. Il y aurait donc une logique objective — accessible à Dieu seul — et une autre, subjective, réservée aux pauvres humains. Mais la logique est par nature subjective, pas de $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ sans sujet : la prétendue logique objective n'est rien d'autre qu'un délire schizophrène.

En attendant, le classique subliminal a accrédité l'idée que la logique constructive — par ce mot un peu galvaudé, je veux dire la logique non essentialiste —, par exemple la logique linéaire, est une logique classique avec une main attachée dans le dos, i.e., une version édulcorée de la logique objective, classique. Ce que l'on argumente techniquement au moyen d'un foncteur d'oubli $|\cdot|$ vers le classique préservant la prouvabilité ; on démontre donc davantage en passant au classique, qui serait ainsi le substrat objectif de cette logique subjective. Selon la $\delta\acute{o}\xi\alpha$ 1.0, le classique serait ainsi le substrat *extensionnel* d'une logique *intensionnelle*, cette dernière expression ouvrant la porte, non au Sujet, mais au subjectivisme :

$$\begin{aligned} |A \otimes B| = |A \,\&\, B| &:= |A| \wedge |B| \\ |A \parr B| = |A \oplus B| &:= |A| \vee |B| \\ |\sim A| &:= \neg|A| \\ |!A| = |?A| &:= |A| \end{aligned}$$

Bien que « plus fort », on concédera cependant que le classique est moins expressif, vu qu'il « piétine les porcelaines » : nous avons vu qu'il induit une ségrégation des « individus ». À ce propos, si ceux-ci sont bien des propositions, il doit en aller de même des nombres entiers : ⓝ étant l'entier n, nous devrions donc obtenir les inégalités ⓜ $\neq$ ⓝ pour $m \neq n$. Lesquelles inégalités sont classiquement inconsistantes : en effet, parmi ⓪,①,②, deux doivent être classiquement équivalentes, donc égales. La gestion logique des nombres entiers entre donc nécessairement en conflit avec le classique : finie la main attachée dans le dos ! Le constructif a donc vocation à être « plus fort » que le classique... pourvu qu'il cesse de s'auto-censurer.

Pour dépasser le stade du classique subliminal, il faut être prêt à refuser la définition tarskienne de la vérité. En effet, $A \otimes B \multimap A$ est logiquement incorrect ;

rien ne s'oppose donc, en principe, à ce que $A \otimes B$ soit vrai, mais que A soit faux (et pas seulement non vrai) [16].

1.4 L'infini

1.4.1 L'infini essentialiste

L'infini, tel qu'il s'exprime en Théorie des Ensembles, est violemment essentialiste : hors d'atteinte et de discussion, il descend du Ciel. Un tel infini est rendu nécessaire par la pratique mathématique qui utilise des structures infinies au sens le plus brutal du terme.

L'infini essentialiste apparaît en logique à travers les *systèmes*, typiques du second ordre. La gestion de ces systèmes demande des opérations infinies au sens essentialiste, i.e., ensembliste. Un exemple typique, le système $\mathbb{F}$ [2] qui requiert, à l'arrière plan, des ensembles infinis : les candidats de réductibilité. On mentionnera aussi les *comportements* ludiques [3].

1.4.2 L'infini dynamique

La valeur de l'infini essentialiste étant posée et indiscutable, force est de constater qu'il n'épuise pas le sujet. En fait, quand on essaye de s'extraire de l'essentialisme, on s'aperçoit que l'infini repose sur la *pérennité*, i.e., le fait que les propositions *ne s'usent pas*. La logique linéaire fait apparaître des propositions non pérennes, ainsi que des opérations de pérennisation, en production $!A$ ou en consommation $?A$.

1.4.3 La Muraille de Chine

L'infini essentialiste est une espèce de Muraille de Chine, par exemple la liste des nombres entiers, rangés au garde à vous. C'est la vision de la logique 1.0, qui n'en sort, exceptionnellement, que pour produire une notion d'« infini potentiel » : l'idée est louable, mais tourne en eau de boudin, celle d'une Théorie des Ensembles avec une main attachée dans le dos.

La linéarité, compatible avec la logique 1.0 comme un Stradivarius avec une boîte d'allumettes, permet d'instiller de la non-pérennité. Ce qui amène à des questions complexes : par exemple, la pérennité elle-même est-elle pérenne ? Il ne s'agit pas de théologie, mais de principes genre $!A \multimap !!A$ qui concernent la *dynamique* de l'infini. L'infini non essentialisé prend ainsi une signification en termes de complexité algorithmique. Arrivé à ce point, l'approche 1.0 à la logique linéaire se ramifie en diverses variantes plus ou moins convaincantes e.g., LLL et ELL (voir [3]), de la pérennisation non pérenne, sans trouver de point d'ancrage.

On remarquera à ce propos la démission complète de la sémantique. Tout comme les entiers qui n'admettent qu'un modèle, il n'y a, sémantiquement parlant, qu'une seule pérennisation. Comme si la sémantique avait l'infini essentialiste, la pérennité pérenne, dans son ADN.

16. Le tableau (18), p. 26, montre les violations que la logique 2.0 inflige au tarkisme.

1.5 La logique 1.5

Entre 1986 et 2010, j'ai essayé de développer, en opposition à l'*essentialisme* 1.0. une approche *existentialiste*. Cette tentative soutenue (ludique, géométrie de l'interaction) est intéressante à plus d'un titre, même si je l'ai finalement abandonnée au profit du *déréalisme* de la logique 2.0. Je propose d'appeler ce chaînon manquant « logique 1.5 ».

1.5.1 Le choc des réseaux

Au départ, le réseau de démonstration n'est qu'une astuce technique — avec, tout de même un résultat non trivial à l'arrière-plan. La principale nouveauté de la logique linéaire, le connecteur multiplicatif $\otimes$, se présentait ainsi :



Cette formulation du second ordre — avec contexte extrinsèque C — est source de complications à n'en plus finir, comme dans le cas de la disjonction intuitionniste. Donc, un obstacle rédhibitoire à la diffusion de la nouvelle idée. D'où la création des réseaux de démonstration [2] qui, au prix de l'abandon de la forme arborescente, restent du premier ordre, i.e., intrinsèques : *exit* le contexte C.

La forme stéréotypée de l'arboresecence, par son manque-même d'expressivité, garantit la correction des déductions naturelles. Par contre, la forme du réseau est éloquente : il peut être correct ou incorrect, tout n'est que question de *parcours*. Ces parcours, que contrôlent des *interrupteurs*, dépendent du contenu logique : par exemple, on connecte les prémisses d'un $\otimes$ alors que l'on déconnecte celles d'un $\parr$. Le théorème de séquentialisation des réseaux réduit, superficiellement, cette syntaxe parallèle au calcul des séquents. Plus profondément, on peut y voir une alternative à la sémantique : on est passé d'une référence externe — l'interprétation dans une catégorie — à une référence purement interne, le parcours du réseau.

1.5.2 La négation normative

Les réseaux de démonstration nous proposent une vision originale de la négation, vue comme critère de correction. La partie supérieure d'un réseau — le cablage entre atomes — constitue la démonstration proprement dite ; alors que la partie inférieure — plus précisément le cablage issu d'un choix d'interrupteurs —, constitue une sorte de démonstration de la négation. Les deux types de cablage, supérieur et inférieur, peuvent se voir comme des permutations σ, τ des atomes $\{1, \ldots, n\}$. Le critère de correction de la démonstration σ s'écrit alors « $\sigma\tau$ cyclique », ceci pour tous les τ induits par les choix d'interrupteurs.

On peut identifier une proposition A à l'ensemble Σ de ses démonstrations, lequel est contrôlé par l'ensemble $\sim\Sigma$ des démonstrations de $\sim A$, au moyen de

la relation d'orthogonalité $\Sigma = (\sim \Sigma)^{\perp}$ (et, par symétrie, $\Sigma^{\perp} = \sim \Sigma$) avec :

$$\sigma \perp \tau \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\tau \quad \text{cyclique} \tag{2}$$

Dans la version 1.0, *essentialiste*, la normativité tombée du Ciel fournit un cadre précontraint pour juger du vrai et du faux. Ainsi, Tarski et sa « vertu négatrice » — $\neg A$ est vrai quand A n'est pas vrai — pose-t-il la négation comme *réfutation*. Cette réfutation est une exclusion mutuelle : on ne saurait avoir simultanément A et $\neg A$, sauf inconsistance. Alors que les réseaux font apparaître la négation comme *récusation* : on passe de « ce référendum a répondu NON » à « ce référendum n'a pas eu lieu ». La récusation n'est pas exclusion mutuelle : tout au contraire, elle suppose la présence simultanée d'un récusateur *et* d'un potentiel récusé. C'est l'interaction entre les deux qui définit le cadre normatif : la logique 1.5 est donc *existentialiste*.

À la version *aléthique* (vrai/faux) de la négation se substitue ainsi une version *normative*. Ce qui est séduisant, mais a un revers, car il est difficile de rendre compte simultanément de l'aléthique et du normatif. L'aléthique est dominé par la notion de *preuve*, alors que le normatif est dominé par celle d'*épreuve*. Les réseaux font apparaître les preuves de A comme des épreuves particulières imposées à $\sim A$. Ils mettent en avant la dualité entre épreuves pour A et pour $\sim A$, mais ce sont les preuves (de $\sim A$ et de A) qui nous intéressent vraiment. Donc se pose la question, jamais résolue de façon vraiment convaincante par la logique 1.5, de la nécessaire distinction entre la notion de preuve et celle, plus laxiste, d'épreuve. Cette question n'est rien d'autre que celle de la vérité, identifiée à l'existence d'une preuve — et donc détachée de la sémantique et des pantalonnades tarskistes.

1.5.3 Ludique et géométrie de l'interaction

Dans les « sémantiques de jeu », lointainement inspirées de Gentzen, les épreuves apparaissent comme des *stratégies*, les preuves étant celles qui sont de plus, *gagnantes*. Cette approche ne s'extrait pas vraiment du cadre essentialiste, 1.0, puisqu'elle suppose une règle du jeu, un arbitre externe. La *ludique* [3] se débarrasse de l'arbitre en développant un jeu existentialiste — i.e., , sans règle — où les stratégies — appelées *desseins* — sont mises en opposition, pour produire une partie, qui peut diverger — ne pas se terminer — ou converger par abandon d'un des joueurs. La convergence d'une combinaison dessein/contre-dessein établit une dualité et l'émergence d'une sorte de règle du jeu implicite [17], appelé *comportement*, i.e., un ensemble [18] de desseins égal à son bi-dual.

L'autre approche typique de la logique 1.5, la *géométrie de l'interaction* [3], remplace les permutations du cas multiplicatif par les unitaires d'un espace de Hilbert. Si la dimension de cet espace devient infinie, on peut étendre la lecture

17. Cette flexibilité de la règle du jeu s'observe, en fait, dans les jeux courants, essentialistes. Par exemple, aux échecs, on se permettra un *Coup du Berger* contre un débutant, ce que l'on n'oserait pas face à un joueur aguerri : les possibilité de réponse des Noirs étant limitées, c'est comme si la règle du jeu était soudainement devenue plus laxiste pour les Blancs.

18. Exemple de lien avec la Théorie des Ensembles.

de la logique au fragment ME^2 (multiplicatifs, exponentielles, quantification du second ordre), qui correspond à peu près au système $\mathbb{F}$.

1.5.4 Une aporie

BHK — Brouwer-Heyting-Kolmogoroff —, appelé aussi improprement *sémantique*[19] *des preuves*, est basée sur la définition :

$$\pi \text{ est une preuve de } A \Rightarrow B \text{ quand } \pi \text{ est une fonction envoyant toute preuve } \pi' \text{ de } A \text{ sur une preuve } \pi(\pi') \text{ de } B \quad (3)$$

Cette définition assez imprécise, mais très intéressante, est fondamentalement existentialiste. En effet, elle définit une preuve de $A \Rightarrow B$, non pas par l'observance de certains rituels formels, mais selon ses interactions. On peut voir la ludique et la géométrie de l'interaction comme des versions précises de cette approche informelle.

De nombreux logiciens ont manifesté leur insatisfaction quant à cette « définition », car il est impossible de déterminer si une preuve en est vraiment une : une fonction n'est-elle pas une entité infinie ? D'où l'idée d'une preuve auxiliaire établissant que π est bien une preuve. Cette « méta-preuve » ravit les essentialistes, qui y voient les prémices d'un nouveau *Kyrie* — la preuve de la preuve de la preuve, ... Kreisel prétendit couper court à cette ânerie en traitant la méta-preuve axiomatiquement ; sa solution, trop désinvolte, n'a donné lieu qu'à des polémiques sectaires, dites du *Saaty volume*, voir [2].

Ce problème se pose pourtant concrètement : il est au cœur de l'échec stratégique de la logique 1.5. En effet, preuves et épreuves — concentrons-nous sur ces dernières — sont profondément hors d'atteinte.

1. Une épreuve, par exemple un *dessein* ludique, est un objet infini. Avec les problèmes, plus ou moins graves, liés à la gestion de l'infini.
2. L'interaction normative $\sigma \perp \tau$ est basée sur une infinité d'épreuves : σ est confronté à la batterie infinie des épreuves τ.
3. Dans la dualité $\sigma \perp \tau$, τ juge la pertinence de σ, mais σ juge celle de τ. Ce qui fait que s'ils se recusent, l'un des deux est disqualifié, mais difficile de dire lequel[20]. Autrement dit, on a affaire à une batterie d'épreuves dont la pertinence est extrèmement complexe.

Voici, *grosso modo*, l'aporie dans laquelle s'est engluée la logique 1.5. Si l'essentialisme nous présente une vérité révélée que l'on peut trouver insupportable d'arrogance, l'existentialisme, basé sur le doute généralisé, est incapable d'assurer quoi que ce soit[21].

Conclusion : il est nécessaire de postuler des épreuves non testables, primitifs. L'interaction avec ces épreuves devient l'*usine*, interaction asymétrique qui

19. Les réalistes voient de la sémantique partout, même dans ce qui est le plus violemment anti-réaliste.
20. Ne jugez pas afin que vous ne soyez point jugés. (*Matthieu 7.1*)
21. Raccourci politique sommaire : le choix Droite/Gauche, c'est dictature contre chienlit.

définit des testés : c'est le critère de correction des réseaux. L'interaction entre *testés*, qui correspond à la conséquence logique (et à la définition (3)), est appelée *usage* : c'est la coupure. L'adéquation usine/usage n'est rien d'autre que la convergence de l'élimination des coupures.

Pour revenir sur l'infortunée discussion sur la preuve de la preuve, on observera que (3) est une définition d'usage, alors que la méta-preuve serait plutôt d'usine. Or, on ne peut pas, simultanément être d'usage et d'usine, avec et sans coupures. Il faut donc choisir entre les deux : soit on écrit un chèque (usine), soit on le dépose en banque (usage). Comme on dit en anglais « you can't have your cake and eat it ».

Pour revenir à BHK, la preuve est définie et testée à l'étape usine ; ce test prétend garantir l'usage, e.g., (3). Mais aucune usine, aucune garantie, quelle qu'elle soit, n'est vraiment absolue : c'est une des leçons de l'incomplétude.

1.5.5 Le second ordre

La logique 2.0 est basée sur l'architecture :

	EXPLICITE	IMPLICITE
ANALYTIQUE	Constat	Performance
SYNTHÉTIQUE	Usine	Usage

(4)

L'idée étant que le synthétique « type » l'analytique, non typé. La différence entre performance et constat n'est autre que l'*indécidabilité*, alors que celle entre usine et usage est sa version synthétique, l'*incomplétude*. Au cœur du dispositif cognitif, l'usine, basée sur la performance — le passage de certains tests appartenant à une batterie finie, un *gabarit*. Le choix de ce gabarit est soumis à une contrainte implicite : les épreuves pour A et ceux pour $\sim A$ doivent s'équilibrer de façon à garantir l'usage, i.e., la coupure entre A et $\sim A$.

Les critères de correction fournissent des batteries finies d'épreuves pour les connecteurs du premier ordre. Mais un problème se pose avec le second ordre que je vais illustrer par un exemple, celui des entiers naturels. On peut définir les entiers dans ME^2 par la proposition du second ordre à la Dedekind : $\mathbf{nat} := \forall X\,((X \multimap X) \Rightarrow (X \multimap X))$. Dont le dual $\sim\mathbf{nat}$ correspond aux itérations — forme calculatoire des récurrences (1). Nous savons, depuis le paradoxe de Richard, que ces itérations, ces récurrences sont problématiques : $\sim\mathbf{nat}$ ne saurait donc disposer d'une batterie finie d'épreuves, puisque l'on pourrait alors déterminer quelles itérations, quelles récurrences sont licites.

Cet exemple montre que l'impossibilité d'étendre l'usine au cas existentiel, e.g., $\sim\mathbf{nat}$, est due à une raison profonde, indépassable. Je ne peux donc pas définir $\exists X\, A[X]$ par dualité tout en préservant l'usine finie de l'architecture (4). Je peux cependant isoler des éléments de $\exists X\, A[X]$, typiquement ceux de $A[P]$, où P est une proposition connue par ailleurs. De tels objets rentrent dans le cadre (4) dans la mesure où P nous est donnée. Cela veut dire qu'il est possible

d'écrire des réseaux pour le second ordre, au moyen d'un lien de prémisse $A[P]$ et de conclusion $\exists X\, A[X]$. Au premier ordre, la partie inférieure du réseau est fixe, déterminée à l'avance : c'est elle qui définit la batterie d'épreuves, i.e., le problème à résoudre dont la solution est la partie supérieure. En présence de $\exists X$, la partie inférieure incorpore la proposition P qui nous apporte ses propres épreuves : P ne fait pas partie du problème, mais de sa solution, qui n'est donc plus entièrement localisée dans la partie supérieure du réseau.

Ce qui amène un changement fondamental de paradigme, au cœur de la distinction entre premier et second ordre. Le premier ordre oppose une entité analytique — non typée, si l'on veut — le *véhicule* $\mathcal{V}$, à un *gabarit* $\mathcal{G}$, batterie finie d'épreuves, tout aussi analytiques[22]. Le second ordre oppose une entité mixte, l'*épure* $\mathcal{V}+\mathcal{M}$, consistant d'un véhicule et d'un gabarit — appelé *moule* — à un gabarit $\mathcal{G}$; c'est cette épure qui est testée. Typiquement, dans la quantification $\exists X\, A[X]$, on va se donner P (représenté par le moule $\mathcal{M}$) et $\pi \in A[P]$ (représenté par le véhicule $\mathcal{V}$) ; le fait de se donner π et P nous permet de tester le fait que π est bien dans $A[P]$ et donc dans $\exists X\, A[X]$.

Le second ordre fait apparaître l'opposition essentialisme/existentialisme comme un Charybde et Scylla. Le *déréalisme* propose de sortir de cette aporie en introduisant une composante subjective de la preuve, le *moule* $\mathcal{M}$. Il légitime ainsi une association objet + sujet déjà à l'œuvre dans une vieille connaissance, le système $\mathbb{F}$ [2] : $t\{\tau\}$ combine le véhicule t et le moule τ.

L'opposition $\mathcal{V}/\mathcal{G}$ entre véhicule et gabarit, devient $\mathcal{V}+\mathcal{M}\,/\,\mathcal{G}$. Que l'on pourrait écrire tout aussi correctement $\mathcal{V}\,/\,\mathcal{M}+\mathcal{G}$; mais il se trouve que $\mathcal{G}$ nous est donné, alors que $\mathcal{M}$, pourtant de nature synthétique, subjective, fait partie de la solution. Nous sommes ainsi sortis du cadre objet/sujet, puisque l'élément subjectif $\mathcal{M}$ est passé dans le camp de l'objet. Ce gendarme devenu voleur est soumis à des conflits d'intérêt, un peu comme le logiciel incorporé dans un diesel Volkswagen, censé aider à tester la voiture… et notoirement trafiqué.

Le moule $\mathcal{M}$, issu du témoin P de la quantification existentielle, apparaît sous la forme analytique de deux batteries d'épreuves, une pour P, codifiant, si l'on veut les *droits* de P, mais aussi une pour $\sim P$, codifiant les *devoirs* afférents, ce qui suppose un équilibre entre droits et devoirs. Techniquement parlant, si $A, \sim A$ sont finis, l'équilibre entre A et $\sim A$ se ramène à deux inclusions :

— $A \subset (\sim A)^{\perp}$ qui s'écrit $a \perp b$ pour $a \in A, b \in \sim A$ ne pose pas problème.

— $A^{\perp} \subset (\sim A)^{\perp\perp}$ — qui correspond à une élimination des coupures — est hors d'atteinte, en accord avec le second théorème d'incomplétude.

L'équilibre étant impossible à vérifier, il ne reste qu'à le postuler. Cet acte, qui consiste à spécifier un système de moules, est de nature axiomatique ; mais pas au sens commun qu'a pris ce mot en logique, puisqu'il s'agit du choix d'une architecture. Je propose donc un mot neuf et éloquent : une *épidictique*. Ce qui signifie qu'en plus de la dualité entre $\mathcal{V}+\mathcal{M}$ et $\mathcal{G}$, le moule doit, de plus, se soumettre à certaines contraintes extrinsèques. Comme la théorie de ces contraintes reste à écrire, je vais m'efforcer de rester, autant que possible, au premier ordre, i.e., la partie de la logique sans système, sans épidictique.

22. C'est le choix des épreuves qui est synthétique : il constitue le typage.

2 Quelques pavés dans la mare

2.1 De nouvelles opérations

2.1.1 Une « révolution copernicienne »

Le point de vue 1.0 sur les réseaux veut que l'on écrive des réseaux pour les règles logiques déjà existantes. Ce qui n'est pas toujours possible, aussi a-t-on souvent été amené à tripatouiller la notion de réseau — c'est ce que j'ai moi-même initié au moyen de *boîtes*. La logique 2.0 renverse la problématique : on va écrire la logique pour les réseaux. On passe ainsi des réseaux de la logique à la logique des réseaux.

Si un principe logique ne s'accommode pas des réseaux, il est donc incorrect. Pour oser porter de tels jugements, il faut, bien entendu, disposer d'une notion mature de réseau, ce qui est maintenant le cas avec la série d'articles [4, 5, 6]. C'est ainsi que tout ce qui tourne autour des exponentielles nues[23] $!A$ et $?A$ est rejeté. Ainsi que les éléments neutres $\mathbf{1} = !\top$ et $\bot = ?\mathbf{0}$ et la disjonction intuitionniste $A \vee B = !A \oplus !B$[24]. Les exponentielles restent cependant légitimes dans les combinaisons $A \oslash B = !A \otimes B$ et $A \ltimes B = ?A \parr B$; $?A$ apparaît d'ailleurs implicitement dans les séquents sous la forme *cachée* $[A]$, voir [4].

Ces quelques exclusions sont amplement compensées par l'émergence de nouvelles opérations. Nous avons déjà rencontré les connecteurs multiplicatifs non séquentiels, i.e., qui ne s'écrivent pas en calcul des séquents [5]. Nous allons maintenant voir des nouveautés plus spectaculaires, les atomes ㇷ et ∃ et les *expansionnelles* (exponentielles allégées) $\downarrow A$ et $\uparrow A$, ainsi que l'*insinuation*[25] $A \rightarrowtail B = \downarrow A \multimap B$.

Ces opérations sont issues des réseaux, plus précisément des éléments neutres additifs [6]. Que l'on peut définir au second ordre par $\mathbf{0} = \forall X\, X$[26] et $\top = \exists X, X$. Mais il ne s'agit pas du vrai second ordre, car la variable X n'apparaît pas négativement : autrement dit, l'épidictique qui gère l'équilibre entre X et $\sim X$ n'est pas sollicitée. D'où la possibilité d'un traitement du premier ordre, mais avec une nouveauté, la présence de moules ou, si l'on préfère, d'adresses subjectives. Les définitions « du second ordre » de $\mathbf{0}$ et $\top$ se simplifient en structures à trois atomes — un objectif $r(x)$, deux subjectifs $s(x), t(x)$. Ainsi, les trois épreuves :

— $[\![\frac{r(x)}{}]\!] + [\![\frac{s(x), t(x)}{\mathbf{0}(x)}]\!]$

— $[\![\frac{s(x)}{}]\!] + [\![\frac{r(x), t(x)}{\mathbf{0}(x)}]\!]$

23. Qui produisent des *nonsenses* comme $!A \parr !B$ que l'on peut simplifier en $\mathbf{1} \parr \mathbf{1}$.

24. Et qui ne fonctionne en déduction naturelle qu'au prix de contorsions — contexte C, réductions commutatives — bien peu... naturelles.

25. Dans le langage courant, une implication a la signification d'un discours indirect, ce qui inclut l'insinuation.

26. Cette définition au second ordre de l'absurdité est à rapprocher du Dieu de la « preuve ontologique », celui qui a toutes les propriétés.

— $[\![\frac{t(x)}{\mathbf{0}(x)}]\!]$

pour **0**. Ce que l'on peut écrire $\mathbf{0} := \downarrow(\text{フ} ⅋ \text{ヲ}) \otimes \text{ヲ}$ (et $\top := \uparrow(\text{フ} \otimes \text{ヲ}) ⅋ \text{ヲ}$). Les opérations フ, ヲ, $\downarrow, \uparrow$ sont d'une nouveauté absolue, car situées dans un angle mort, un point aveugle de la sémantique : rappelons que les catégories font de **0** un élément *initial*, i.e., une sorte d'ensemble vide dont l'on aurait du mal à imaginer les composantes ! Ce sont en fait les éléments *invisibles*, analogues à ces fichiers cachés (`.ssh`, etc.) qui jouent pourtant un rôle essentiel dans l'architecture informatique.

Dualement $\top$ s'écrit donc $\uparrow(\text{フ} \otimes \text{ヲ}) ⅋ \text{ヲ}$; la règle permettant de remplacer A par $\top$ prend une preuve π de A et une épreuve $\mathcal{O}$ de A : π et la partie supérieure de $\mathcal{O}$ sont délocalisées en フ et ヲ — les deux étant dupliqués par $\uparrow$, tandis que la conclusion A de $\mathcal{O}$ devient l'occurrence droite de ヲ.

Ces opérations nous permettront de définir, entre autres, les entiers relatifs ⓝ qui vérifient ¬(ⓜ ≡ ⓝ) pour $m \neq n$ et bafouent ainsi la vérité classique.

$$\textcircled{3} := \text{フ} \otimes \text{フ} \otimes \text{フ} \otimes \text{ヲ} \quad (5)$$

$$\textcircled{1} := \text{フ} \otimes \text{ヲ} \quad (6)$$

$$\textcircled{0} := \text{ヲ} \quad (7)$$

$$\textcircled{-3} := \text{フ} ⅋ \text{フ} ⅋ \text{フ} ⅋ \text{ヲ} \quad (8)$$

Ce qui fait que $\top := \textcircled{-1} \rightarrowtail \textcircled{0}$.

2.1.2 Les constantes *fu* et *wo*

Les nouvelles constantes s'écrivent au moyen des *katakanas* フ (fu) et ヲ (wo). フ est un véritable atome, qui ne dispose donc d'aucune brique LEGO spécifique. Pour ヲ, c'est un peu plus compliqué, puisqu'il s'agit d'une constante *subjective*. La brique LEGO associée prend la forme $[\![\frac{q_{\text{ヲ}}(\mathtt{s} \cdot x)}{\boxed{q_{\text{ヲ}}(x)}}]\!]$, où `s` est subjective, e.g., `s` = `cya(l)`.

La différence entre フ et ヲ est invisible du strict point de vue de la correction. Mais pas de celui de la vérité : l'implication $\text{フ} \multimap \text{ヲ}$ (qui est identique à $\text{ヲ} \multimap \text{フ}$!) est fausse ; par contre, comme ?フ peut utiliser une copie subjective de フ, l'implication intuitionniste $\text{フ} \Rightarrow \text{ヲ}(= !\text{フ} \multimap \text{ヲ})$ est vraie. Ainsi, toutes les propositions utilisant la seule constante ヲ sont-elles prouvables, alors que celles utilisant フ ne le sont pas toujours, voir section 2.2.

Les variables propositionnelles n'ont aucun rapport avec フ. En effet, la version standard des réseaux utilise bien le critère de correction de フ, mais une contrainte épidictique — ne lier que des X et des $\sim X$ — s'y rajoute. Cette contrainte peut être éliminée au moyen de positionnement d'interrupteurs idoines, voir [4], section 4.1.

Contentons-nous, pour l'instant, de remarquer que フ et ヲ sont auto-duales [27] : フ $= \sim$フ, ヲ $= \sim$ヲ. Il est donc impossible de leur attribuer des « valeurs d'oubli » classique, puisque l'on aurait $|$フ$| = \neg|$フ$|$, $|$ヲ$| = \neg|$ヲ$|$.

2.1.3 L'expansionnelle

La référence de base est [4], section 5. L'exponentielle y est décrite comme le résultat de deux opérations, une synthétique, l'autre analytique.

Synthétique : c'est à dire au niveau du critère de correction. L'opération consiste à *cacher* des conclusions. Si $\mathcal{V}$ est un véhicule qui se veut preuve de Γ, A, le critère de correction consiste à demander que, pour une épreuve $\mathcal{O}$, la forme normale de $\mathcal{V} + \mathcal{O}$ soit $\llbracket p_{\Gamma,A}(x) \rrbracket := \llbracket p_\Gamma(x), p_A(x) \rrbracket$. Une preuve de $\Gamma, [A]$, où A est *caché*, se teste au moyen des $\mathcal{O}'$ obtenus en remplaçant dans $\mathcal{O}$ la brique LEGO $\llbracket \frac{q_A(x)}{p_A(x)} \rrbracket$ par $\llbracket \frac{q_A(x)}{} \rrbracket$ et à demander que la forme normale de $\mathcal{V} + \mathcal{O}'$ soit $\llbracket p_\Gamma(x) \rrbracket$. Ce qui fait que la forme normale de $\mathcal{V} + \mathcal{O}$ est de la forme $\llbracket p_\Gamma(x), p_A(t_1), \ldots, p_A(t_n) \rrbracket$, où $t_1, \ldots, t_n$ sont disjoints. Ce côté indéfini de la forme normale limite la socialisation de A qui devient un « ion logique ».

Cette opération est tellement naturelle et lumineuse que l'on a envie de la légaliser et d'en faire une autre exponentielle, appelée *expansionnelle*. Les expansionnelles $\downarrow A, \uparrow A$ rejoignent ainsi les exponentielles $!A, ?A$ au rayon des opérations de *pérennisation*. Nul besoin de choisir entre les deux : il s'agit d'opérations du premier ordre, donc définies sans relation à un système global.

Détaillons les briques LEGO associées à la correction. Comme $\downarrow A, \uparrow A$ sont des ions logiques, ils ne vivent que dans les combinaisons $C := \downarrow A \otimes B$ et $D := \uparrow A \parr B$. Ce qui donne les briques LEGO suivantes, inspirées de celles de la section 5.5. de [4], mais beaucoup plus simples, puisque la variable auxiliaire y a disparu :

$$\downarrow_{\mathtt{f}} : \llbracket \frac{q_A(\mathtt{f}(x)), q_B(x)}{\boxed{q_C(x)}} \rrbracket.$$

$$\downarrow_{\mathtt{g}} : \llbracket \frac{q_A(\mathtt{g}(x)), q_B(x)}{\boxed{q_C(x)}} \rrbracket.$$

$$\uparrow_R : \llbracket \frac{q_B(x)}{\boxed{q_D(x)}} \rrbracket + \llbracket \frac{q_A(x)}{} \rrbracket.$$

$$\uparrow_{1'} : \llbracket \frac{q_A(x)}{\boxed{q_D(x)}} \rrbracket.$$

Les positions $\downarrow_{\mathtt{f}}$ et $\downarrow_{\mathtt{g}}$ utilisent deux fonctions unaires distinctes, $\mathtt{f}$ et $\mathtt{g}$. Comme seul x s'unifie avec $\mathtt{f}(x)$ et $\mathtt{g}(x)$, seul $\boxed{q_A(x)}$ pourra se raccorder à la fois à

27. Remarque d'intérêt psychologique : la prégnance de la vieille logique 1.0 est telle qu'après avoir écrit [4], j'ai cherché les critères disqualifiant ce que j'ai fini par accepter : フ et ヲ. Un vieux surmoi russellien se hérissait à l'idée d'une constante auto-duale, ce qui rappelle superficiellement $\{x; x \notin x\}$. $A = \sim A$ est un paradoxe dans le sens où il s'oppose au dogme, mais pas une antinomie, car en aucune façon contradictoire.

$q_A(\mathtt{f}(x))$ et $q_A(\mathtt{g}(x))$. À partir de $\downarrow_{\mathtt{f}}$ et $\downarrow_{\mathtt{g}}$, on peut déduire la correction des positionnements $[\![\frac{q_A(x), q_B(x)}{\boxed{q_C(x)}}]\!]$ (un simple tenseur) et $[\![\frac{q_B(x)}{\boxed{q_C(x)}}]\!]$ (un effacement de la « boîte » $\downarrow$) [28]. $\downarrow A$ se positionne donc comme sous-type de A, i.e., $\downarrow A \subset A$: ce qui est la forme la plus naturelle de *déréliction*.

$\uparrow_R$ est la position droite d'un $⅋$; l'impossibilité d'une position gauche est compensée par la position *nilpotente* [29] $\uparrow_{\mathtt{1}'}$.

Analytique : c'est à dire au niveau du véhicule. On trouve les principes de déréliction et de promotion. Quand aux règles structurelles proprement dites, l'expansionnelle permet toujours l'affaiblissment. Mais $A \rightarrowtail B := \downarrow A \multimap B$ (l'*insinuation*) est plus qu'une implication linéaire affine. Elle permet aussi, dans des limites très strictes, la contraction, marque de la pérennité.

Il n'est pas possible d'obtenir une version analytique de la contraction générale [30] sans faire intervenir une variable auxiliaire y, ce qui complique passablement les définitions. Pour mettre les pieds dans le plat, la contraction, au sens le moins élaboré, consiste à mélanger A' et A'', deux « occurrences » de A, pour en faire $?A$. Maintenant, comment mettre ensemble des $p_{A'}(t')$ et des $p_{A''}(t'')$? On voudrait les remplacer par $p_{?A}(t' \cdot \mathtt{l}), p_{?A}(t'' \cdot \mathtt{r})$, mais le problème est que A admet des sous-formules qui sont en porte-à-faux avec $x \cdot \mathtt{l}, x \cdot \mathtt{r}$. C'est pourquoi l'exponentielle « ? » gère $t' \cdot \mathtt{l}, t'' \cdot \mathtt{r}$ au moyen d'une variable auxiliaire y — qui prend ici les valeurs $\mathtt{l}, \mathtt{r}$.

En décidant de supprimer la variable auxiliaire, je réduis considérablement les possibilités de contraction. Fondamentalement, je suis condamné à ne contracter que des atomes : je n'aurai pas à m'en faire alors pour les sous-formules. La première question qui se pose concerne la nature des atomes : les atomes tous frais フ et ヲ ne posent aucun problème, car ce sont des constantes. Mais *quid* des variables $X, \sim X$? On ne peut rien faire, car même leur critère de correction — qui suppose des substitutions internes, par exemple celles proposées dans [4], section 4.1 — échouerait.

L'expansionnelle ne nous permet pas non plus de dupliquer les expansionnelles — ou les exponentielles. Les configurations faisant alterner $\downarrow$ et $\uparrow$, par exemple $U = A \rightarrowtail B$ posent, en effet, problème quant à la duplication : les atomes de U et ceux de $\sim U$ sont duplicables, mais ces duplications ne vont pas s'entendre. Autrement dit, $\uparrow A$ n'autorise pas la duplication sur A quand A renferme $\downarrow$ (ou !).

On ne peut donc pas dupliquer une fonction (au sens de $\rightarrowtail$ ou $\Rightarrow$). Le réseau évident de conclusions $\uparrow(\downarrow A \otimes \sim B), (\uparrow \sim A ⅋ B) \otimes (\uparrow \sim A ⅋ B)$ est problématique, car le critère de correction pour la sous-formule $\downarrow A \otimes \sim B$ interdit de mélanger quoi que soit au-dessus de $\downarrow A$. Si la fonctionnelle $f \leadsto f \otimes f$ n'est pas acceptée, en revanche, pourvu que l'on puisse contracter sur B, $f \leadsto \lambda x.f(x) \otimes f(x)$ est

28. Ces critères plus faibles étaient utilisés pour la constante $\mathbf{0}$ dans [6]. Ile ne suffisent plus quand $\uparrow$ n'est pas limité à la configuation $\top = \uparrow$ (フ $\otimes$ ヲ) $⅋$ ヲ.

29. *Cancelling* dans [4].

30. Et donc l'équivalence $\downarrow(A \,\&\, B) \equiv \downarrow A \otimes \downarrow B$.

tout à fait acceptée : le réseau pour $\uparrow(\downarrow A \otimes \sim B), \uparrow \sim A, B \otimes B$ est correct, car le seul mélange se produit au-dessus de $\sim B$.

Depuis l'émergence des connecteurs non séquentiels, nous savons que la logique existe hors calcul des séquents, qui n'est donc pas cette condition *sine qua non* du statut logique. Il reste, cependant, l'accès le plus commode à l'usine, i.e., le « sans coupures ». C'est pourquoi la formulation d'une règle de contraction adaptée à l'expansionnelle est un problème important.

2.1.4 Questions de complexité

$\downarrow(A \rightarrowtail A), \ldots, \downarrow(A \rightarrowtail A), A \rightarrowtail A \vdash A \rightarrowtail A$, valide quand A est sans expansionnelle (ou exponentielle), ne se contracte pas en $\downarrow(A \rightarrowtail A) \vdash A \rightarrowtail A$. Si on lit ce principe $f_1, \ldots, f_k, f \rightsquigarrow f \circ f_k \circ \ldots \circ f_1$, on peut toujours faire $f_1 = \ldots = f_k = f$, auquel cas le résultat est de taille polynomiale (de degré $k+1$) en la taille $|f| \cdot (k+1)$ des arguments.

L'analytique expansionnelle est basée sur des fonctions unaires pour lesquelles on peut espérer des bornes polynomiales, voir [1]. Mais seulement espérer, car [1] ne concerne pas vraiment les étoiles, mais la version concurrente [31], les *flots*.

Ce point clarifié, il reste à trouver une borne inférieure pour la complexité algorithmique du fragment où les exponentielles sont remplacées par des expansionnelles. La difficulté étant de coder les algorithmes de base dans ce cadre.

Il est fort possible que l'expansionnelle ne soit que la version correcte de l'implication linéaire affine ; et ne soit donc pas l'exponentielle allégée que nous avons tant cherchée sans jamais la trouver vraiment.

2.2 La vérité ou le chien de Musil

D'un autre point de vue, la solution d'un problème intellectuel, c'est un peu comme quand un chien tenant un bâton dans sa gueule essaye de passer par une étroite ouverture ; il tourne la tête de droite et de gauche jusqu'enfin le bâton glisse au travers ; nous agissons exactement de même, avec la seule différence que nous n'allons pas tout à fait au hasard, mais que nous savons plus ou moins, par habitude, comment nous y prendre.

Cette citation de *L'Homme sans qualités* illustre à merveille l'incroyable tâtonnement qui préside à la recherche d'une vérité non révélée [32]. Ici, l'ouverture étroite est la notion de vérité, qui doit être déductivement stable et consistante. Le bâton dans la bouche, ce sont les deux axiomes de Peano qui impliquent qu'il y ait une infinité d'entiers : $Sx \neq 0, Sx = Sy \Rightarrow x = y$. La démonstration logique de ces deux principes donnerait, enfin, un statut logique aux entiers naturels, même si $\mathbb{N}$ reste fondamentalement du second ordre.

31. Que j'abandonne définitivement : l'utilisation des étoiles permet l'utilisation de l'invariant d'Euler-Poincaré.
32. Et qui m'a pris trente ans !

Si les entiers sont des propositions $\textcircled{n}$, cela donnerait :

$$\neg(\textcircled{n+1} \multimap \textcircled{0}) \quad (n \geq 0) \tag{9}$$

$$(\textcircled{m+1} \multimap \textcircled{n+1}) \multimap (\textcircled{m} \multimap \textcircled{n}) \tag{10}$$

Deux principes qui s'opposent violemment au classique subliminal ; d'où la difficulté de trouver la réponse, au demeurant très simple.

2.2.1 La fin du pléonasme

L'essentialisme 1.0 relègue la vérité au rayon sémantique : elle ne serait qu'un pléonasme externe. Qui induit, au mieux, quelques développements techniques intéressants mais mineurs, comme le *schéma de réflexion* de l'arithmétique [2].

Le problème de la vérité se pose, de façon fondamentale, à cause de la dimension normative de la négation. En effet, la dualité impose que toutes les propositions — même l'absurdité **0** — soient, en quelque sorte, « démontrables ». Ce qui implique de distinguer des « vraies » preuves au sein d'une classe plus vaste d'épreuves. La vérité devient alors le fait de posséder une (vraie) preuve [33].

2.2.2 Épures et animæ

L'idée d'épure correspond à la somme $\mathcal{V}+\mathcal{M}$ d'un véhicule et d'un moule. Le véhicule et moule se différentient par le type de rayons utilisés dans leurs étoiles respectives : objectifs pour le véhicule, subjectifs pour le moule. Autrement dit, une épure est une constellation dont les étoiles sont soit entièrement objectives, soit entièrement subjectives.

Il existe une classe plus vaste d'*animæ*, qui permettent des étoiles mixtes. Ce type de constellation « animiste » — elle mélange objet et sujet — est le seul que l'on rencontre dans les propositions vraiment fausses comme **0**. On décide de les exclure du paradis des preuves.

Ce qui nous donne la condition suivante, qui m'a longtemps semblé nécessaire :

Seules les épures $\mathcal{V} + \mathcal{M}$ sont des preuves.

La restriction aux épures $\mathcal{V} + \mathcal{M}$ semblant chose acquise, faut-il demander quelque chose de plus aux véhicules $\mathcal{V}$? Cette demande est sujette à une seule contrainte : les preuves doivent être stables par déduction, autrement dit, par coupure et donc, par normalisation.

33. Le distinguo 1.0 entre « vrai » et « prouvable » n'est qu'un SCUD tarskiste dirigé contre l'incomplétude.

2.2.3 La binarité

La solution la plus simple consiste à ne rien demander à $\mathcal{V}$. Elle fonctionne parfaitement dans le cadre traditionnel — du second ordre — où les atomes sont des variables.

Mais l'irruption des constantes du premier ordre rend cette solution élégante un peu sommaire. En effet, toutes les propositions du premier ordre n'utilisant que 7 — et donc dépourvues de partie subjective — seraient vraies, donc équivalentes et finalement inutiles. Une solution — celle proposée en [6] — consiste à restreindre les étoiles de $\mathcal{V}$: elles doivent être binaires, i.e., de la forme $[\![\, t, u \,]\!]$. Ce qui est inclut les véhicules obtenus à partir du second ordre pur : le critère de correction assure que X ne peut être lié qu'à $\sim X$, et donc que les étoiles sont binaires. Ce critère « binaire » est déductivement stable, car la normalisation — basée sur le remplacement $[\![\, t, u \,]\!] + [\![\, u, v \,]\!]$ par $[\![\, t, v \,]\!]$ — préserve la binarité.

2.2.4 L'invariant d'Euler-Poincaré

Le *critère de Danos-Regnier* présente une alternative à ma propre approche aux mutiplicatifs en termes de permutations. Après un long débat, il appert que cette approche en termes de *partitions* est la bonne, car seule à même de rendre compte de la vérité.

Deux partitions $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ de $\{1, \ldots, n\}$ $(n \neq 0)$ sont *orthogonales* quand le graphe bipartite dont les sommets sont les eléments de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ et les arêtes les entiers $1, \ldots, n$: i relie $I \in \mathcal{S}$ et $J \in \mathcal{T}$ quand $i \in I \cap J$ est connexe et acyclique. Son invariant d'Euler-Poincaré, égal par définition à $\mathtt{card}(\mathcal{S}) + \mathtt{card}(\mathcal{T}) - n$ est alors égal à 1. Chaque moitié contribue à cette valeur 1, pourvu de lui attribuer la moitié $n/2$ des arêtes : $(\mathtt{card}(\mathcal{S}) + n/2) + (\mathtt{card}(\mathcal{T}) + n/2) = 1$. Ce qui induit les définitions qui vont suivre, où l'invariant a été remplacé par son double.

L'*invariant d'Euler-Poincaré* d'une constellation objective est défini par :

$$\sharp [\![\, t_1, \ldots, t_n \,]\!] \quad := \quad 2 - n \tag{11}$$

$$\sharp(\mathcal{S}_1 + \ldots + \mathcal{S}_k) \quad := \quad \sharp\mathcal{S}_1 + \ldots + \sharp\mathcal{S}_k \tag{12}$$

En particulier, $\sharp\mathcal{V} = 0$ quand $\mathcal{V}$ est binaire. « $\sharp$ » est stable par normalisation : $\sharp([\![\, t_1, \ldots, t_m, u \,]\!] + [\![\, u, v_1, \ldots, v_n \,]\!]) = \sharp[\![\, t_1, \ldots, t_m, v_1, \ldots, v_n \,]\!]$: $(2 - (m+1)) + (2 - (n+1)) = 2 - (m+n)$.

Après avoir beaucoup tatonné, le chien croit y être arrivé :

$$\mathcal{V} + \mathcal{M} \text{ est vraie quand } \sharp\mathcal{V} \geq 0.$$

Cela rend bien compte du quatrième axiome de Peano (10) ; mais le troisième (9) fait de la résistance.

2.2.5 Le gain

Je reviens sur l'interdiction de l'animisme en admettant les étoiles mixtes. En notant une étoile $[\![\, t_1, \ldots, t_m; u_1, \ldots, u_n \,]\!]$ (t_i objectifs u_j subjectifs) :

$$\sharp[\![\, t_1, \ldots, t_n; \,]\!] := 2 - n \tag{13}$$

$$\sharp[\![\, t_1, \ldots, t_n; u_1, \ldots, u_{m+1} \,]\!] := -n \tag{14}$$

Autrement dit, les rayons subjectifs d'une étoile comptent globalement pour 2. L'« invariant » d'une étoile non animiste est $\sharp[\![\, t_1, \ldots, t_n \,]\!] = 2 - n$ (objective) et $\sharp[\![\, t_1, \ldots, t_n \,]\!] = 0$ (subjective), ce qui prolonge la définition de la section 2.2.4. On appelle *gain* cet invariant modifié.

Si $\mathcal{S} \perp \mathcal{T}$, alors $\sharp\mathcal{S} + \sharp\mathcal{T} \leq 2$; si l'on n'a pas égalité $\sharp\mathcal{S} + \sharp\mathcal{T} = 2$, c'est que le gain est susceptible d'augmenter par normalisation :

1. $[\![\, t_1, \ldots, t_n, t; \,]\!] + [\![\, t'_1, \ldots, t'_{n'}, t; \,]\!] \leadsto [\![\, t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_{n'}; \,]\!]$:
   $(2 - (n+1)) + (2 - (n'+1)) = 2 - (n + n')$.
2. $[\![\, t_1, \ldots, t_n, t; u_1, \ldots, u_{m+1} \,]\!] + [\![\, t'_1, \ldots, t'_{n'}, t; \,]\!] \leadsto$
   $[\![\, t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_{n'}; u_1, \ldots, u_{m+1} \,]\!]$:
   $-(n+1) + (2 - (n'+1)) = -(n + n')$.
3. $[\![\, t_1, \ldots, t_n, t; u_1, \ldots, u_{m+1} \,]\!] + [\![\, t'_1, \ldots, t'_{n'}, t; u'_1, \ldots, u'_{m'+1} \,]\!] \leadsto$
   $[\![\, t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_{n'}; u_1, \ldots, u_{m+1}, u'_1, \ldots, u'_{m'+1} \,]\!]$:
   $-(n+1) + (-(n'+1)) < -(n + n')$.
4. $[\![\, t_1, \ldots, t_n; u_1, \ldots, u_m, u \,]\!] + [\![\, t'_1, \ldots, t'_{n'}; u'_1, \ldots, u'_{m'}, u' \,]\!] \leadsto$
   $[\![\, t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_{n'}; u_1, \ldots, u_m, u'_1, \ldots, u'_{m'} \,]\!]$:
   il $-(n+n') \leq \sharp[\![\, t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_{n'}; u_1, \ldots, u_m, u'_1, \ldots, u'_{m'} \,]\!]$, car ce dernier gain vaut soit $-(n+n')$ (si $m+m' \neq 0$) ou $2-(n+n')$ (si $m = m' = 0$).

Si l'on définit la vérité de $\mathcal{T}$ par $\sharp\mathcal{T} \geq 0$, on voit que la normalisation *renforce* la vérité.

2.2.6 Les multiplicatifs

À une proposition A bâtie à partir des atomes フ et ヲ, on attribuera un gain, le plus grand parmi ceux de ses épreuves. Dans certains cas, par exemple quand A n'utilise que フ ou que ヲ, toutes ses épreuves ont en fait le même gain.

$$\sharp \text{フ} = 1 \tag{15}$$

$$\sharp(A \otimes B) = \sharp A + \sharp B \tag{16}$$

$$\sharp(A \parr B) = \sharp A + \sharp B - 2 \tag{17}$$

Ainsi, $\sharp(\text{フ} \otimes \text{フ} \otimes \text{フ}) = 3$, $\sharp(\text{フ} \parr \text{フ}) = 0$, $\sharp(\text{フ} \parr \text{フ} \parr \text{フ} \parr \text{フ} \parr \text{フ}) = -3$. Si $0 \leq \sharp A \leq 2$, e.g., $A = \text{フ}$, alors A et $\sim A$ sont vraies.

Quant à ヲ, toutes les propositions bâties à partir de cette seule constante sont vraies. Le cas vraiment intéressant est celui des combinaisons entre フ et ヲ, voir *infra*, section 2.2.8. Je résume les résultats de cette section. L'égalité

correspond à l'équivalence « $\equiv$ », l'inégalité l'implication « $\multimap$ », toutes deux linéaires.

1. Les classes d'équivalence des multiplicatifs sont les $\urcorner_n$ et les $\textcircled{n}$ $(n \in \mathbb{Z})$.
2. $\urcorner_m \otimes \urcorner_n = \urcorner_{m+n}$ et $\urcorner_m \parr \urcorner_n = \urcorner_{m+n-2}$
3. $\sim\urcorner_n = \urcorner_{2-n}$, $\urcorner_m \multimap \urcorner_n = \urcorner_{n-m}$
4. $\textcircled{m} \otimes \textcircled{n} = \textcircled{m} \parr \textcircled{n} = \textcircled{n+m}$
5. $\sim\textcircled{n} = \textcircled{-n}$ et $\textcircled{m} \multimap \textcircled{n} = \textcircled{n-m}$
6. $\textcircled{m} \otimes \urcorner_n = \textcircled{m+n}$, $\textcircled{m} \parr \urcorner_n = \textcircled{m+n-2}$
7. $\textcircled{m} \multimap \urcorner_n = \textcircled{n-m-2}$, $\urcorner_m \multimap \textcircled{n} = \textcircled{n-m}$

ainsi que :

1. Les $\textcircled{n}$ et $\urcorner_n$ sont prouvables pour $n \geq 0$.
2. Les $\textcircled{n}$ et $\urcorner_n$ sont réfutables pour $n < 0$.
3. Les $\textcircled{m} \multimap \textcircled{n}$ et $\urcorner_m \multimap \urcorner_n$ sont prouvables pour $m \leq n$.
4. Les $\textcircled{m} \multimap \textcircled{n}$ et $\urcorner_m \multimap \urcorner_n$ sont réfutables pour $m > n$.

Les $\urcorner_m$ et les $\textcircled{n}$ sont distincts : en effet, $\sim\urcorner_n = \urcorner_{2-n}$ alors que $\sim\textcircled{n} = \textcircled{-n}$. La seule relation entre les deux séries est l'encadrement :

$$\urcorner_n \leq \textcircled{n} \leq \urcorner_{n+2}$$

Les multiplicatifs non séquentiels ne changent rien au tableau : on peut attribuer à tout connecteur multiplicatif $\mathcal{C}$ un gain $\sharp C := n - 2k$ où n est l'arité et k le nombre de classes de ses partitions — donc $\sharp\otimes = 0, \sharp\parr = -2$.
$\mathcal{C}$ peut être encadré par deux connecteurs séquentiels $\mathcal{C}^+ \leq \mathcal{C} \leq \mathcal{C}^-$ de même gain que $\mathcal{C}$. Si $A := \mathcal{C}(\urcorner, \exists, \urcorner, \ldots)$ est obtenu à appliquant $\mathcal{C}$ à des constantes, alors $A^+ \leq A \leq A^-$; comme $A^+ = A^-$, $A = A^+$.

2.2.7 Autres connecteurs

Le cas multiplicatif est facile, car tout est utilisé exactement une fois. Si l'on introduit les expansionnelles, la duplication et l'effacement posent problème : comment compter le contenu d'une « boîte » $\downarrow A$? Bien sûr, ces boîtes n'ont plus de statut analytique — on ne calcule pas avec elles — mais elles gardent leur intérêt synthétique : le critère de correction pour $\downarrow A \otimes B$ identifie très clairement la partie gauche. Je propose donc un décompte séparé dans et hors la boîte ; et donc dans les *zones*, i.e., les différences de boîtes. On demande que ces zones

soient séparément vraies. Idem pour l'exponentielle $!A$. Quant aux additifs, il faut individualiser les tranches « & » et demander la vérité de chacune d'elles.

Cette définition de vérité étant bien comprise, on remarquera qu'elle n'influe en rien sur la vérité du second ordre pur, sans les constantes フ et ヲ. En effet, toutes les étoiles sont alors binaires et ont donc un gain ≤ 0. Une étoile binaire animiste $[\![t, u]\!]$ est de gain -1, d'où le refus total de l'animisme au second ordre « pur », sans constantes. Et rappellons que ce second ordre est la seule logique connue jusqu'à cet article !

La longue interrogation sur l'analytique, le choix entre étoiles et flots binaires — ces derniers menant aux algèbres de von Neumann — se conclut finalement sur une victoire des étoiles, seules à même de parler de vérité.

2.2.8 Les entiers relatifs

On définit les entiers relatifs par $\textcircled{n} := \text{フ}_n \otimes \text{ヲ}$, avec $\sharp \text{フ}_n = n$. Typiquement, pour $n > 0$, $\text{フ}_n = \text{フ} \otimes \text{フ} \otimes \ldots \otimes \text{フ}$ (tenseur de n « フ ») et pour $n < 2$, $\text{フ}_n = \text{フ} \parr \text{フ} \parr \ldots \parr \text{フ}$ (par de $2-n$ « フ ») ; ce qui fait que $\text{フ}_1 = \text{フ}$, $\text{フ}_0 = \text{フ} \parr \text{フ}$. Les entiers ≥ 0 sont prouvables, pas les autres.

$\text{ヲ} \otimes \text{ヲ} \equiv \text{ヲ}$ est prouvable, comme toutes les propositions bâties à partir de ヲ. Et donc, puisque $\text{フ}_m \otimes \text{フ}_n \equiv \text{フ}_{m+n}$, obtient $\textcircled{m} \otimes \textcircled{n} \equiv \textcircled{m+n}$. L'inégalité se définit par $\textcircled{m} \leq \textcircled{n} := \textcircled{m} \multimap \textcircled{n}$. En particulier — bravo, le chien ! — en utilisant $\textcircled{-1} \otimes \textcircled{n+1} \equiv \textcircled{n}$, on obtient (10).

Observons maintenant que $\textcircled{0} \equiv \text{ヲ}$:

— $\text{フ} \parr \text{フ}$, de gain 0, est prouvable, donc $\text{ヲ} \multimap (\text{フ} \parr \text{フ}) \otimes \text{ヲ}$.

— Réciproquement, $\vdash \text{フ}_2, \text{ヲ}, \text{ヲ} = \vdash (\text{フ}' \otimes \text{フ}''), \text{ヲ}', \text{ヲ}''$ est prouvable au moyen de la constellation animiste $[\![\text{フ}']\!] + [\![\text{フ}'', \text{ヲ}', \text{ヲ}'']\!]$ de gain $1 + (-1) = 0$.

En général, $(\text{フ}_n \otimes \text{ヲ}) \equiv (\text{フ}_{n+2} \parr \text{ヲ})$. En effet :

— À partir de $\vdash \text{ヲ}, \text{フ}_2, \text{ヲ}$, on obtient $\vdash \text{ヲ} \parr \text{フ}_n, (\text{フ}_2 \otimes \text{フ}_n) \parr \text{ヲ}$.

— À partir de $\vdash \text{ヲ}, \text{ヲ}$ et d'épreuves pour $\sim\text{フ}_{n+2}$ et フ_n de gains $2-(n+2) = -n$ et n, on obtient une preuve de $\vdash (\sim\text{フ}_{n+2} \otimes \text{ヲ}), (\text{フ}_n \otimes \text{ヲ})$.

Et donc $\textcircled{-n} \equiv \text{フ}_{2-n} \parr \text{ヲ} \equiv \sim(\text{フ}_n \otimes \text{ヲ}) \equiv \sim\textcircled{n}$. Les entiers s'écrivent donc $(\text{フ} \otimes \ldots \otimes \text{フ}) \otimes \text{ヲ}$ (n fois « フ ») pour $n > 0$ et $(\text{フ} \parr \ldots \parr \text{フ}) \parr \text{ヲ}$ (n fois « フ ») pour $n < 0$. Quand à $\textcircled{0}$, il fait le joint entre les deux. Dans ce contexte limité, $\text{フ} \parr \text{フ}$ et $\text{フ} \otimes \text{フ}$ jouent le rôle des défunts élément neutres $\mathbf{1}$ et $\perp$.

On voit que $\textcircled{m} \multimap \textcircled{n}$ représente, en plus de l'inégalité, la différence $\textcircled{n-m}$.

Les inégalités $\textcircled{m} \leq \textcircled{n}$ sont prouvables quand $m \leq n$; c'est parce que $p := n - m \geq 0$ et que $\textcircled{p}$ est alors prouvable.

L'absurdité $\mathbf{0}$ s'écrit $\downarrow \textcircled{-1} \otimes \textcircled{0}$. L'inégalité $\textcircled{m} \leq \textcircled{n}$ pour $m > n$ se ramène

à $\textcircled{p}$, avec $p < 0$, qui implique $\textcircled{-1}$. Maintenant, $\textcircled{-1} \rightarrowtail \downarrow\textcircled{-1} \otimes \textcircled{0}$, et donc $\textcircled{-1} \rightarrowtail \mathbf{0}$, où $\rightarrowtail$ est l'*insinuation* $\downarrow\cdot \multimap \cdot$. Et donc $\hat{\neg}\textcircled{-1}$, où $\hat{\neg}A$, définie par $\downarrow A \multimap \mathbf{0}$, est la *dénégation* opération qui implique la négation usuelle $!A \multimap \mathbf{0}$.

On obtient donc (9) : le chien a bien mérité son nonosse.

La logique classique force $(A \Leftrightarrow B) \vee (B \Leftrightarrow C) \vee (C \Leftrightarrow A)$, variante du tiers exclu qui interdit l'existence de trois propositions deux à deux prouvablement inéquivalentes. Ici, nous en avons une infinité — par rapport à l'équivalence linéaire — les $\textcircled{n}$.

On est bien loin de la vérité classique. Le tableau suivant donne la liste des déviations possibles (avec $\mathbf{v}$ = prouvable, $\mathbf{f}$= réfutable) par rapport aux tables de vérité. La première ligne, avec $A = B = \daleth_0$, donne $A \parr B = \daleth_{-2}$ et $\sim A = \daleth_2$. La seconde ligne, avec $A = \daleth_{-1}, B = \daleth_1$, donne $A \otimes B = \daleth_0$ et $A \parr B = \daleth_{-2}$. Pas de déviation quand A et B sont faux. « $\parr$ » est plus déviant que « $\otimes$ » car la négation n'échange pas le vrai et le faux.

A	B	$A \otimes B$	$A \parr B$	$\sim A$
v	**v**		**f**	**v**
f	**v**	**v**	**f**	

(18)

Fin donc du foncteur d'oubli et du classique subliminal (section 1.3.2). On vient de réaliser le *jailbreak* du tarskisme !

Remarque Il ne faudrait pas croire qu'il ne s'agit que d'un changement de tableau de vérité, **v**,**f** étant remplacés par $\mathbb{Z}$. Par exemple, $\textcircled{n}$ et $\daleth_n$, de même gain n, ne sont pas équivalents. En fait, $\textcircled{n} \multimap \daleth_n \equiv \textcircled{-2}$: l'équivalence est violemment fausse !

C'est donc la fin, non seulement de la vérité classique, mais du paradigme sémantique des tables de vérité, quelqu'elles soient. Le calcul de vérité — du gain — s'applique, non pas à des propositions, mais à des épreuves.

Ce qui se comprend si l'on voit la dualité comme une sorte de jeu : la « stratégie » $\mathcal{S} \in A$ est opposée à une *contre-stratégie* $\mathcal{T} \in \sim A$ pour former une *partie*. Dans cette partie, les gains respectifs de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont de somme au plus 2. Dans le cas multiplicatif, ce gain ne dépend pas du choix de $\mathcal{T}$[34]. Finalement, le gain de A est le maximum des gains associés aux stratégies $\mathcal{S} \in A$[35]. Les gains de $A, B, \ldots$ ne déterminent pas toujours les gains de leurs combinaisons logiques, ce qui explique la disparition définitive des tables de vérité.

34. En général, le gain de $\mathcal{S}$ est défini comme le minimum des gains du même $\mathcal{S}$ quand $\mathcal{T}$ varie parmi toutes les stratégies de $\sim A$; il peut donc prendre la valeur $-\infty$.

35. Dans le cas général, non multiplicatif, il peut prendre les valeurs $-\infty$ (constante 0) ou $+\infty$ (constante $\top$).

Jean-Yves Girard
Directeur de Recherches émérite
jeanygirard@gmail.com

vitam impendere logicæ

Références

[1] C. Aubert and M. Bagnol and T. Seiller. **Unary Resolution : Characterizing Ptime**. In *Foundations of Software Science and Computation Structures (FOSSACS)*, Eindhoven, Netherlands, April 2016.

[2] J.-Y. Girard. **Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2006. 296 pp.

[3] J.-Y. Girard. **Le point aveugle, tome 2 : vers l'imperfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2007. 299 pp.

[4] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 1 : deterministic case**. *Mathematical Structures in Computer Science*, pages 1–23, 2015. *Computing with lambda-terms. A special issue dedicated to Corrado Böhm for his 90th birthday.*

[5] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 2 : non deterministic case**. *Logical Methods in Computer Science*, 2016. *Special issue dedicated to Pierre-Louis Curien for his 60th birthday.*

[6] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 3 : equality**. *Logical Methods in Computer Science*, 2016. *Special issue dedicated to Pierre-Louis Curien for his 60th birthday.*

[7] J.-Y. Girard. **Le Fantôme de la transparence**. Allia, Paris, Septembre 2016. 248 pp.